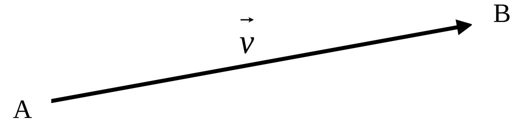
VECTORES EN EL PLANO

Vector fijo.

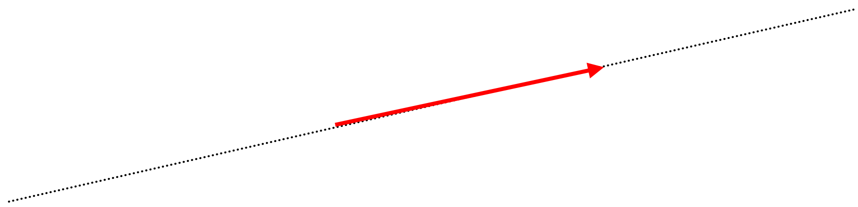
Es un segmento orientado. Lo representamos por $\overrightarrow{AB}$ o por $\vec{v}$. El punto A es el origen y el punto B el extremo. Mientras no preste confusión el vector $\vec{v}$ podemos expresarlo simplemente por ***v.***



Características de un vector.

Módulo: Es la longitud del vector. Lo representamos por $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$ o $\left\|\vec{v}\right\|$. Las barras verticales pueden ser también sencillas.

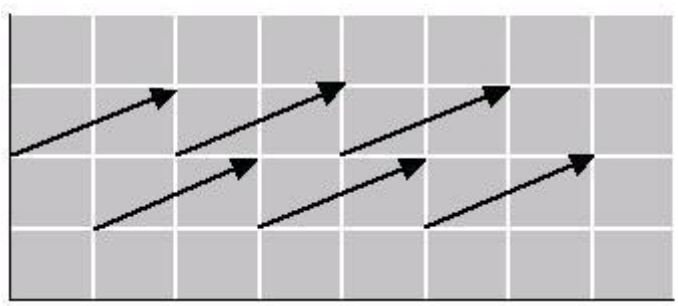
Dirección: Es la dirección de la recta que lo contiene. Si dos vectores son paralelos tienen la misma dirección.



Sentido: Es el que va del origen al extremo. Lo representamos por la punta de la flecha. Una dirección tiene dos sentidos.

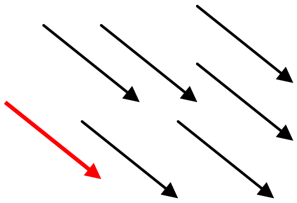
Vectores equipolentes:

Son aquellos que tienen la misma dirección, el mismo módulo y el mismo sentido.



Vector libre.

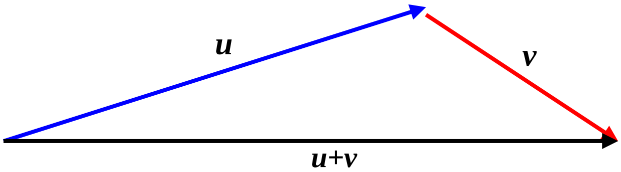
Es el conjunto formado por un vector fijo y todos los vectores equipolentes a él.



Suma geométrica de vectores.

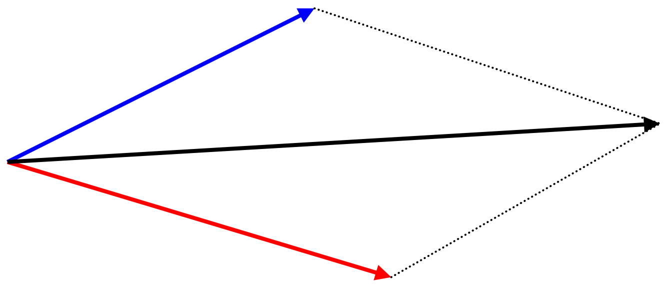
Para sumar dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ podemos hacerlo de dos maneras:

1.- Desde un punto cualquiera del plano colocamos un vector equipolente a $\vec{u}$ y a partir del extremo de este colocamos otro vector que sea equipolente a $\vec{v}$ de manera que coincidan el extremo del primero con el origen del segundo. La suma es el vector que tienen como origen el origen del primero y como extremo el extremo del segundo.



2.- Ley del paralelogramo: Formamos un paralelogramo con dos vectores equipolentes a los dados de forma que coincidan los orígenes y la suma es la diagonal del paralelogramo tomando como origen el origen de los vectores equipolentes elegidos.

La suma de vectores es conmutativa.



Producto de un vector *v* por un número real k.

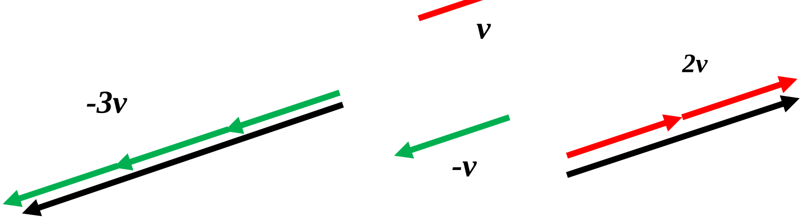
Es otro vector que expresamos por $\overrightarrow{kv}$ y que tiene:

Dirección: la misma que ***v***

Sentido: el mismo que ***v*** si **k** es positivo y sentido contrario si **k** es negativo.

Módulo: el producto del módulo de ***v*** por el valor absoluto de **k**.

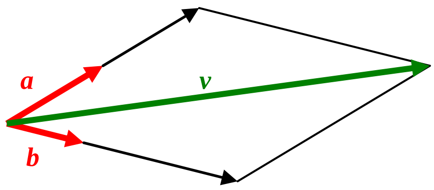
$$\left\|\overrightarrow{kv}\right\| = |k|.\left\|\vec{v}\right\|$$



Combinación lineal de vectores.

Dados dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, diremos que el vector $\vec{v}$ es combinación lineal de ellos si existen dos números reales **x** e **y** tales que $\vec{v} = x.\vec{a} + y.\vec{b}$.

Ejemplo:



v*=2.*a*+3.*b

Base canónica del plano. (Base ortonormal)

Es el conjunto formado por dos vectores perpendiculares y de módulo unidad, (vectores unitarios).

Suele expresarse por $B = \{\, i,\ j \,\}$, siendo ***i*** y ***j*** los vectores citados.

Se verifica entonces que $i \perp j$ y que $\| i \| = \| j \| = 1$

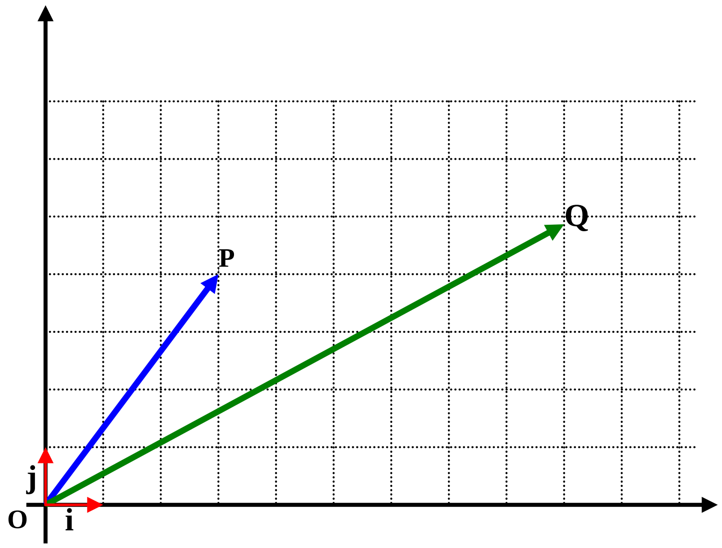
Sistema de referencia en el plano.

Es el conjunto formado por:

- Un punto fijo **O,** llamado origen.
- Una base cualquiera.

Tomando la base canónica $B = \{\, i,\ j \,\}$ como base habitual, un sistema de referencia queda expresado en la forma siguiente: $\mathrm{R} = \{\, O, \{\, i,\ j \,\}\,\}$

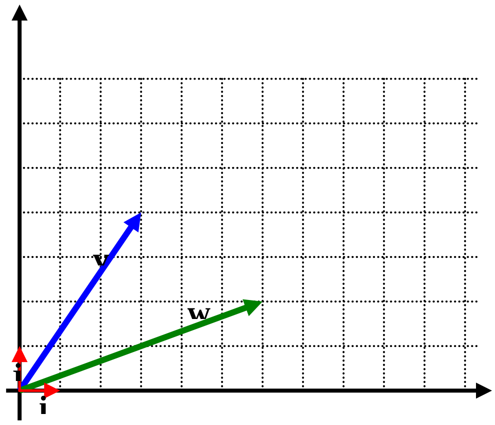
Dado un sistema de referencia , a cada punto ***P*** del plano se le asocia un vector $\overrightarrow{OP}$ que recibe el nombre de vector de posición



Al punto **P** se le asocia el vector de posición $\overrightarrow{OP}$

Al punto **Q** se le asocia el vector de posición $\overrightarrow{OQ}$

Coordenadas de un vector en una base ortonormal.



Los vectores ***i*** y ***j*** se pueden expresar como combinación lineal de ellos mismos.

i=1.***i***+0.***j***

j=0.***i***+1.***j***

Es decir,

Las coordenadas de ***i*** son (1, 0)

Las coordenadas de ***j*** son (0, 1)

Podemos, por tanto, expresar ***i*** y ***j*** en función de sus coordenadas.

I *=(1, 0)*

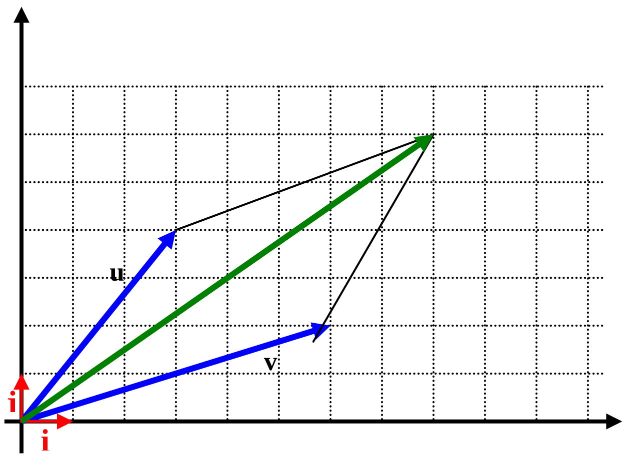
j = (0. 1)

En el caso de ***v*** y ***w*** será: ***v*** = 3i +4j = (3, 4); ***w*** =6i +2j = (6, 2)

En general, si ***v*** =xi + yj, podemos poner ***v*** = (x, y) donde **x** e **y** son las coordenadas del vector.

Operaciones con vectores expresados en coordenadas de una base canónica.

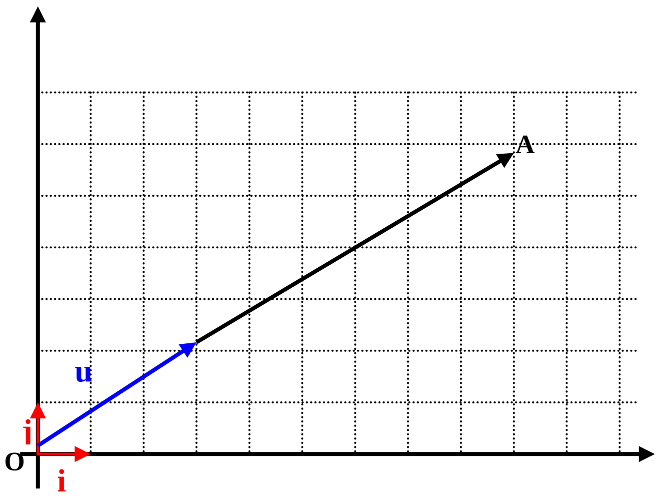
Suma:



$$u = 3i + 4j = (3{,}1)$$
$$v = 6i + 2j = (6{,}2)$$
$$u + v = 8i + 6j = (8{,}6)$$

Vemos que las coordenadas de ***u+v*** se obtienen sumando las coordenadas de ***u*** y ***v***
En general, si $u = (x_1, y_1)$ y $v = (x_2, y_2)$ entonces, $u + v = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

Producto:



Coordenadas de $\vec{u} = (3{,}2)$

Coordenadas de $\overrightarrow{3u} = \overrightarrow{OA} = (9{,}6)$

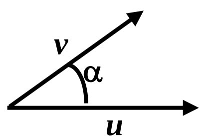
Las coordenadas $\overrightarrow{3u}$ se obtienen multiplicando por **3** las coordenadas de ***u***

En general, si $u = (x, y)$, $\overrightarrow{ku} = (kx, ky)$

<u>Producto escalar de dos vectores.</u>

Es el número que se obtiene al multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \cos\alpha$$



El producto escalar es conmutativo.

Si los vectores vienen expresados en coordenadas de una base ortonormal, el producto escalar adopta la siguiente forma:

$$\vec{u} = x_1 i + y_1 j \,; \qquad \vec{v} = x_2 i + y_2 j \,,$$

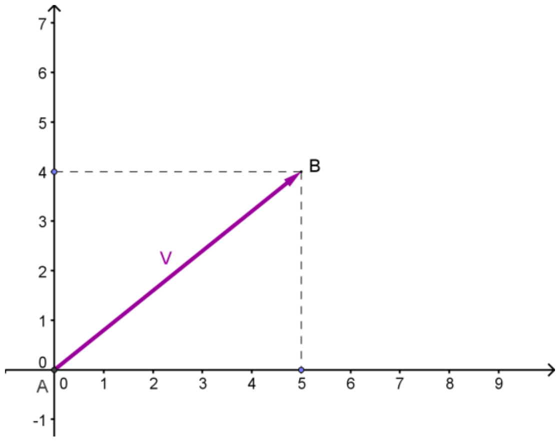
$\vec{u}.\vec{v} = (x_1 i + y_1 j).(x_2 i + y_2 j)$, es decir,

$$\vec{u}.\vec{v} = (x_1x_2)(i.i) + (x_1y_2)(ij) + (y_1x_2)(ji) + (y_1y_2)(jj) = x_1x_2 + y_1y_2$$

teniendo en cuenta que ***i.i=1*** y que ***i.j=j.i=0***. $(\cos 0^o = 1 \text{ y } \cos 90^o = 0)$

Módulo de un vector.

Lo hacemos a través de un ejemplo:



Sea el vector $v = 5i + 4j = (5,4)$

Por el teorema de Pitágoras:

5

$$\|v\|^2 = 5^2 + 4^2$$

$$\|v\| = +\sqrt{5^2 + 4^2}$$

El módulo de ***v*** es la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de las coordenadas.

En general, si $v = (x, y)$ entonces,

$$\|v\| = +\sqrt{x^2 + y^2}$$

El producto escalar podemos utilizarlo también para determinar el módulo de un vector.

Sea el vector *v*:

Si calculamos el producto escalar de *v* por sí mismo resulta:

$v.v = \|v\|.\|v\|.\cos\alpha = \|v\|\|v\| = \|v\|^2$ y entonces resulta que $\|v\|^2 = v.v \Rightarrow \|v\| = \sqrt{v.v}$

es decir, el módulo de un vector es la raiz cuadrada positiva del producto escalar de un vector por sí mismo.

Ángulo de dos vectores.

Se obtiene aplicando la fórmula de definición de producto escalar.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|}$$

Ejercicios resueltos

1.- Dados los vectores $\vec{a}(5,-3)$ y $\vec{b}(-2,6)$

a) Súmalos analíticamente.

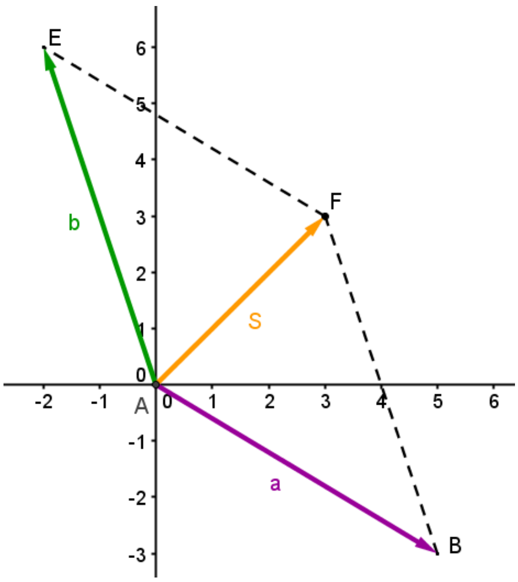
b) Súmalos geométricamente.

c) Calcula analíticamente $2\cdot\vec{a}-\vec{b}$

Solución:

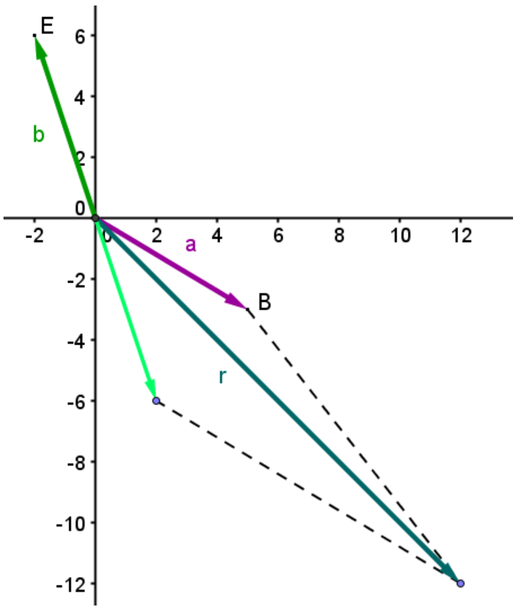
a) Sumamos la 1ª coordenada del vector a con la 1ª coordenada del vector b y la 2ª coordenada del vector a con la 2ª coordenada del b, es decir,

$\vec{a}+\vec{b}=(5+(-2),(-3)+6)=(3,3)$



b) Construimos paralelogramo:

La suma es la diagonal del paralelogramo.



c) $2\cdot\vec{a}-\vec{b}$

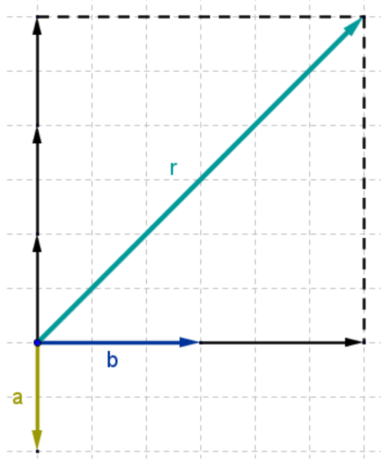
= *2(5, - 3) – (- 2, 6)*

= *(10, - 6) – (- 2, 6)*

= *(12, - 12)*

2.- Expresa el vector **x** como combinación lineal de **a** y **b**.

Solución:



Hemos construido un paralelogramo de modo que la diagonal sea el vector **x**

Y observando la figura se obtiene que

r = - 3a + 2b

3.- Las componentes de **u**, **v** y **w** respecto de una cierta base son ***u*** *= (5,0),* ***v*** *= (2,1)* y ***w*** *= (1,-2).* Expresa el vector **u** como combinación lineal de los otros.

Solución:

$u = \alpha . v + \beta . w$, es decir, $(5,0) = \alpha(2,1) + \beta(1,-2)$

Lo que nos lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 5 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases}$$

Lo resolvemos por reducción multiplicando la primera ecuación por 2 y sumándola con la segunda:

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta = 10 \\ \alpha - 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 5\alpha = 10 \Rightarrow \alpha = 5$$

Sustituyendo el valor de α obtenido en la segunda ecuación del sistema se obtiene que $\beta = 5/2$

La combinación lineal queda de la forma siguiente:

$$u = 5.v + \frac{5}{2}.w$$

4.- Halla las coordenadas del vector de origen el punto *O(-2, -1)* y extremo el punto *A(3, 3)*

Solución:

Se obtienen restando a las coordenadas del extremo las coordenadas del origen, es decir,

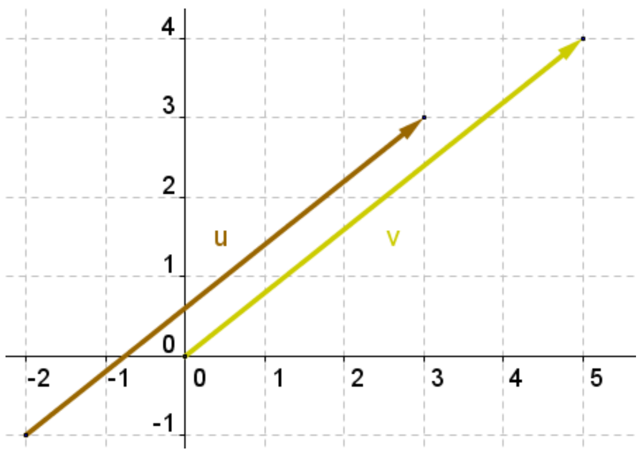
$$OA = (3,3) - (-2,-1) = (5,4)$$

Podemos verlo geométricamente:

Para ir del origen al extremo tenemos que hacer lo siguiente:

- Avanzar 5 unidades hacia delante
- Subir 4 unidades

Luego las coordenadas son (5, 4)



5..- Calcula x para que ***a*** = *(5,2)* sea ortogonal a ***b*** = *(x,-5).*

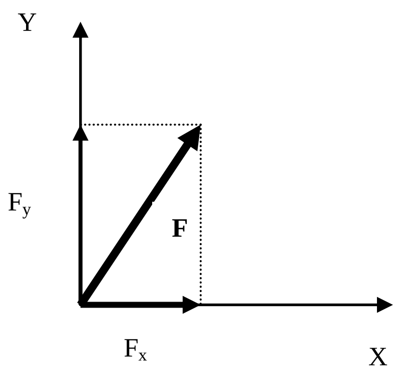
<u>Solución:</u>

Se ha de verificar que el producto escalar sea cero, por tanto,

$a.b = 0 \Rightarrow (5,2).(x,-5) = 0 \Rightarrow 5x + 2.(-5) = 0$, es decir, $5x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2$

COMPONENTES VECTORIALES

Se sabe que todo vector posee componentes rectangulares que se dibujan proyectando a vector sobre los ejes de coordenadas cartesianas como se muestra en el dibujo.



F_x = Proyección Ortogonal del vector F sobre el eje X

Su valor es: $F_x = F \cdot Cos\, \alpha$

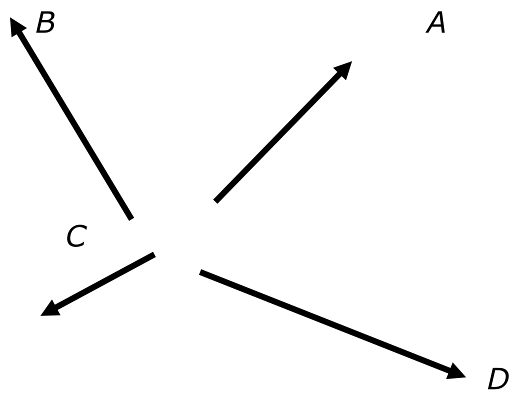
F_y Proyección Ortogonal del vector F sobre el eje Y

Su valor es: $F_y = F \cdot Sen\, \alpha$

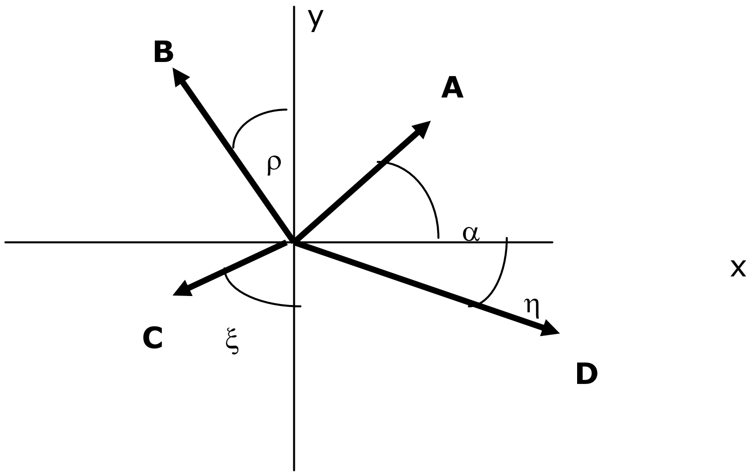
Por otro lado se observa que al sumar las componentes F_x y F_y por el método del paralelogramo se obtiene al vector **F**.

Ángulo que especifica la dirección de F: $\alpha = Tan^{-1}\dfrac{F_y}{F_x}$

Procedimiento para obtener la resultante de la suma de vectores concurrentes (recomendado cuando son muchos los vectores a sumar)



Se trasladan los vectores a lo largo de sus direcciones y se hacen coincidir los orígenes de los mismos con el origen de un sistema de ejes ortogonales, elegido en forma conveniente.



b) Se descomponen cada uno de los vectores en sus componentes ortogonales: **x** e **y**

$A_x = |\mathbf{A}| \cos\alpha$ $\qquad$ $C_x = -|\mathbf{C}| \operatorname{sen}\xi$

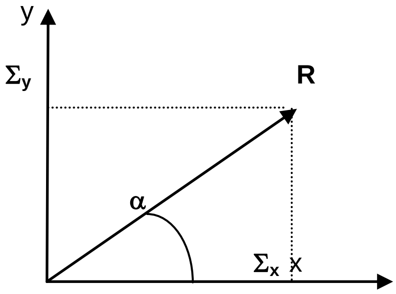
$A_y = |\mathbf{A}| \operatorname{sen}\alpha$ $\qquad$ $C_y = -|\mathbf{C}| \cos\xi$

$B_x = -|\mathbf{B}| \operatorname{sen}\rho$ $\qquad$ $D_x = |\mathbf{D}| \cos\eta$

$B_y = |\mathbf{B}| \cos\rho$ $\qquad$ $D_y = -|\mathbf{D}| \operatorname{sen}\eta$

c) Se suman algebraicamente (teniendo en cuenta sus signos) las componentes **x** y las componentes **y** respectivamente.

$$\sum_x = Ax + B_x + C_x + D_x \quad ; \quad \sum_y = A_y + B_y + C_y + D_y$$



d) Quedará así formado un triángulo rectángulo cuyos catetos serán las sumas de las componentes ya mencionadas y la hipotenusa (obtenida por el método del paralelogramo) nos dará el módulo y la dirección del vector resultante. Aplicando el teorema de Pitágoras se determina el módulo de este último y con alguna función trigonométrica se determina el ángulo que forma con uno de los ejes elegidos (la dirección).

$$|R| = \sqrt{(\Sigma_x)^2 + (\Sigma_y)^2}$$

$$\alpha = Tan^{-1}\frac{\Sigma_y}{\Sigma_x}$$

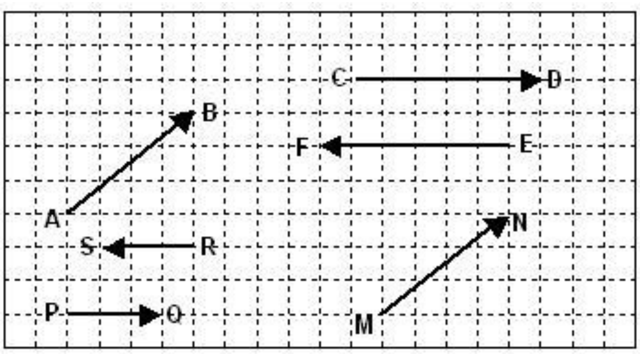
Actividad Individual.

1.- Indica la opción correcta:

a) La velocidad de un cuerpo es una magnitud escalar, ya que queda completamente determinada por un número.
b) La velocidad es, simplemente, un concepto físico
c) La velocidad es una magnitud vectorial ya que para determinarla tenemos que especificar su módulo, su dirección y su sentido.

2.- Indíquese en la siguiente relación cuáles son magnitudes escalares y cuáles vectoriales: Peso, masa, fuerza, potencia, trabajo y aceleración.

3.-Observa el dibujo:



a) Indica el origen y el extremo de cada uno de los vectores representados.

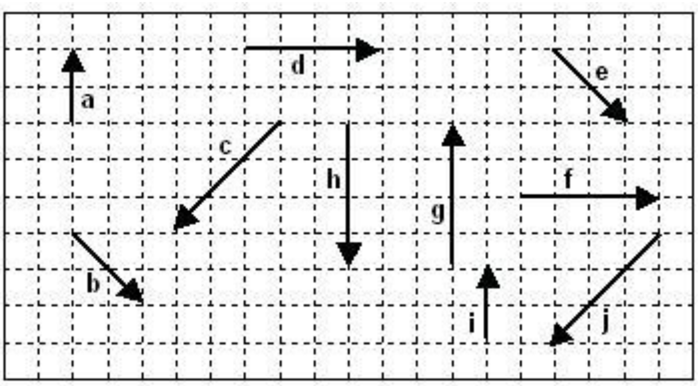
b) Calcula el módulo de cada uno de ellos.

c) ¿Cuáles tienen el mismo sentido?

d) ¿Cuáles tienen sentido contrario?

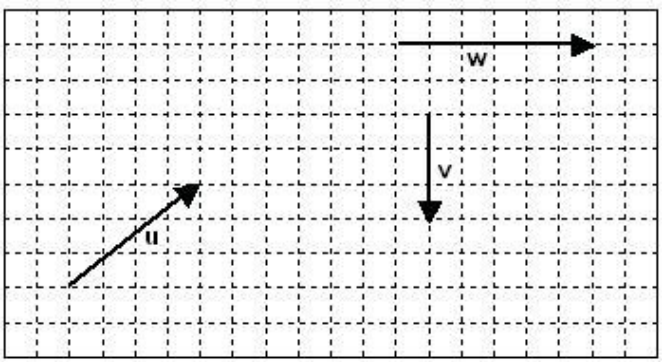
e) ¿Cuáles tienen la misma dirección?

4.- Agrupa en conjuntos de vectores equipolentes

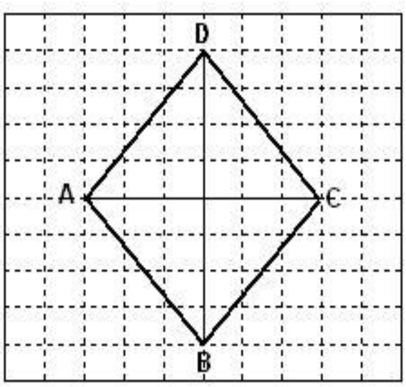


5.- Dibuja un vector que sumado con **u** dé cómo resultado el vector **w.**

Dibuja otro vector que sumado con **v** dé también como resultado **w**



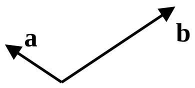
6.- Observa el rombo de la figura y calcula:



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=$ $\quad\quad$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=$

7.- Dados los vectores:



Representa gráficamente el vector $-3a+b$

8.- Dibuja:

a. Una base no ortogonal.
b. Una base ortogonal pero que no sea ortonormal.
c. Una base ortonormal

9.- Dados los vectores **a**(3,-2), **b**(-1,2) y **c**(0,-5), calcula m y n de modo que

c = m**a** + n**b**

12.- Las componentes de los vectores **u** y **v** en una cierta base son **u** = (2,-5) y **v** = (-3,2). Calcula:

a) **u** +**v** ; b) 4**v** ; c) 2**u**-3**v**

13.- Halla el módulo de los siguientes vectores: **a** = (3,4); **b** = (6,-8)

14.- Calcula el producto escalar de dos vectores **u** y **v** sabiendo que |**u**|=2, |**v**|=3 y que forman un ángulo de 30º.

15.- Halla el ángulo formado por los vectores ***u*** *=-5i +12j* y ***v*** *=8i-6j*.